**ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΠΡΟΠΥΛΑΙΑ ΡΕΘΥΜΝΟ**

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**Γ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
**ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024**

# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

**(Ενδεικτικές απαντήσεις)**

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 76
**Α2.** Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 157
**Α3.** Σχολικό βιβλίο – Σελίδα 216
**Α4.**
α) Σωστό
β) Σωστό
γ) Λάθος
δ) Λάθος
ε) Σωστό

## ΘΕΜΑ Β

**Β1.** Είναι: $D_g=[1,+\infty)$ και $D_h=[1,+\infty)$

Έχουμε $D_f=\left\{x\in D_g\cap D_h \text{ και } h(x)\neq 0\right\}$

Για x ≥ 1 λύνουμε $h(x)=0\Leftrightarrow \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow \sqrt{x}=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\Leftrightarrow (\sqrt{x})^2=1\Leftrightarrow x=1$

Επομένως, $D_f=\{x\geq 1 \quad \text{και} \quad x\neq 1\}=(1,+\infty)$

Για x > 1 έχουμε: $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}=\dfrac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2+1}{\sqrt{x}}}{\dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2-1}{\sqrt{x}}}=\dfrac{x+1}{x-1}$

Έχουμε $D_r=D_g\cap D_f=[1,+\infty)$

Για x ≥ 1 έχουμε: $r(x)=g(x)\cdot h(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)=\left(\sqrt{x}\right)^2-\dfrac{1}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=x-\dfrac{1}{x}$ .

**Β2. 1ος τρόπος**

Για x > 1 η f συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{x+1}{x-1}\right)'=\frac{(x+1)'(x-1)-(x+1)(x-1)'}{(x-1)^2}=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=\frac{-2}{(x-1)^2}<0 \text{ για } x>1.$$

Επομένως, η f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα και 1 – 1, έτσι η f αντιστρέφεται στο (1, +∞).
Βρίσκουμε το σύνολο τιμών της f στο (1, +∞)

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left[(x+1)\dfrac{1}{x-1}\right]=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\dfrac{x}{x}=1$

Επομένως, $f\left(D_f\right)=(1,+\infty)=D_f^{-1}$.

Για x > 1 και y > 1 έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow yx-y=x+1\Leftrightarrow yx-x=y+1\Leftrightarrow x(y-1)=y+1\Leftrightarrow x=\frac{y+1}{y-1}.$$

Έτσι, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$ , $x>1$. Επομένως, $f = f^{-1}$.

**2ος τρόπος**

Έστω $x_1, x_2 \in [1,+\infty)$ με $x_1 < x_2$. Έστω $f(x_1) = f(x_2)$. Θα αποδείξουμε ότι $x_1 = x_2$. Έχουμε:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1}=\frac{x_2+1}{x_2-1}\Rightarrow x_1x_2-x_1+x_2-1=x_1x_2+x_1-x_2-1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_2+x_2=x_1+x_1\Rightarrow 2x_1=2x_2\Rightarrow x_1=x_2.$$

Άρα, η f είναι 1 – 1, επομένως η f αντιστρέφεται.

Για x > 1, έχουμε:

$$y=f(x)\Leftrightarrow y=\frac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow yx-y=x+1\Leftrightarrow yx-x=y+1\Leftrightarrow x(y-1)=y+1\overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x=\frac{y+1}{y-1}$$

Επειδή όμως, x > 1 πρέπει $\dfrac{y+1}{y-1}>1\Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1}-1>0\Leftrightarrow \dfrac{y+1}{y-1}-\dfrac{y-1}{y-1}>0\Leftrightarrow \dfrac{y+1-(y-1)}{y-1}>0\Leftrightarrow \dfrac{y+1-y+1}{y-1}>0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{y-1}>0\Leftrightarrow y-1>0\Leftrightarrow y>1 .$$

Έτσι, $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}, x>1$. Επομένως, $f = f^{-1}$.

**Β3.** Η r είναι συνεχής στο [1, +∞), επομένως η r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Θα ψάξουμε για πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες της r στο +∞.

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{r(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x-\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{x^2-1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{x^2}=1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[r(x)-x]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\dfrac{1}{x}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{x}\right)=0$

Άρα, η ευθεία y = x είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο +∞.

**Β4.** Για να έχει νόημα η εξίσωση πρέπει $x\in D_f$ και $f(x)\in D_{f^{-1}}$, δηλαδή x > 1 και $\dfrac{x+1}{x-1}>1$.

Λύνουμε:

$$\frac{x+1}{x-1}>1\Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1}-\frac{x-1}{x-1}>0\Leftrightarrow 1\frac{2}{x-1}>0\Leftrightarrow x>1.$$

Επομένως, πρέπει x > 1. Για x > 1 έχουμε:

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4r(x)\Leftrightarrow x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x^2=1+4x-\frac{4}{x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^3=x+4x^2-4\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0\Leftrightarrow (x-4)\left(x^2-1\right)=0\Leftrightarrow 1$$

$$\Leftrightarrow x=4 \text{ ή } x=-1 \text{ ή } x=1 .$$

Οι λύσεις x = 1, x = -1 απορρίπτονται λόγω του περιορισμού. Άρα, μοναδική λύση της εξίσωσης η x = 4.

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1.** Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, έχουμε ότι είναι συνεχής και στο $x_0=2$, δηλαδή ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=f(2)$ .

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to2^-}f(x)=\lim\left(-2x+4+e^{\lambda}\right)=e^{\lambda}$
- $\lim\limits_{x\to2^+}f(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)=\lambda+1$
- $f(2)=-2^2+4\cdot2-3+\lambda=\lambda+1$

Επομένως, πρέπει $e^{\lambda}=\lambda+1$

Από τη γνωστή ανισότητα $e^{\lambda}\geq\lambda+1$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι η ισότητα ισχύει μόνο για λ=0. Έτσι η εξίσωση $e^{\lambda}=\lambda+1$ έχει μοναδική λύση τη λ=0.

**Γ2.** Για λ=0, η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+5, 0\leq x<2\\ -x^2+4x-3, x\geq 2\end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο [0,2] και παραγωγίσιμη στο (0,2) με $f'(x)=-2$.

Η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με $f'(x)=-2x+4$.

Επίσης

- $$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$

- $$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-3-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-\left(x^2-4x+4\right)}{x-2}=-\lim_{x\to 2^+}(x-2)=0$$

Επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$

$$\text{Έτσι, } f'(x)=\begin{cases}-2,\ 0\leq x<2\\ -2x+4, x>2\end{cases}$$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επίσης, η f έχει (ολικό) μέγιστο για x=0 το f(0)=5.

| $x$ | $0$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | | $-$ | |
| $f(x)$ | | | | | |

**Γ3.** i) Έχουμε δείξει στο ερώτημα Γ2 ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$. Άρα, η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα [0,3].

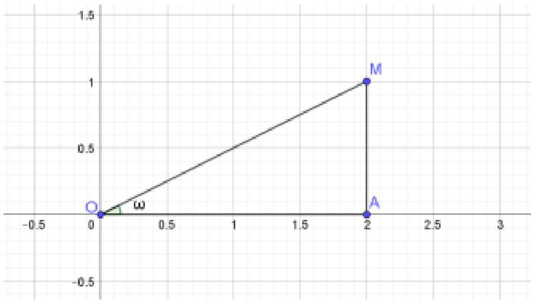
ii) Βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,f(0)),E(3,f(3))$

$$\lambda_{\Delta E}=\frac{y_E-y_\Delta}{x_E-x_\Delta}=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{0-5}{3}=-\frac{5}{3}$$

Ψάχνουμε $\xi\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-\frac{5}{3}$.

- Αν $\xi\in(0,2)$ είναι $f'(\xi)=-2\neq-\frac{5}{3}$. Άρα, δεν υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-\frac{5}{3}$
- Αν $2<\xi<3$ τότε $f'(\xi)=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow-2\xi+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow\ -6\xi+12=-5\Leftrightarrow-6\xi=-17\Leftrightarrow\xi=\frac{17}{6}$ δεκτό γιατί $2=\frac{12}{6}<\frac{17}{6}<\frac{18}{6}=3$

Επομένως, η εφαπτομένη της $C_f$ στο Γ(ξ, f(ξ)) με $\xi=\frac{17}{6}$ είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,f(0))$ και $E(3,f(3))$.




**Γ4.** Ισχύει ότι $y'(t)=0,5=\frac{1}{2}$ . Έστω $t_0$ η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο Μ συναντά τη $C_f$. Είναι $x(t_0)=2$ και $y(t_0)=f(2)=1$ . Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα τη χρονική στιγμή $t_0$ έχουμε $OM^2=OA^2+AM^2 \Leftrightarrow OM=\sqrt{x^2(t_0)+2^2} \Leftrightarrow$ .

$\Leftrightarrow OM=\sqrt{1^2+4} \Leftrightarrow OM=\sqrt{5}$

Ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{y(t)}{2}$, άρα

$$(\varepsilon\varphi\omega(t))'=\frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \omega'(t)=\frac{y'(t)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}{2}.$$

Ισχύει επίσης, $\sigma\upsilon\nu\omega(t_0)=\frac{2}{\sqrt{5}}$ . Άρα $\omega'(t_0)=\frac{y'(t_0)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}}{2}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}\text{rad}/\sec$ .

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Για x>0 έχουμε $f(x)=\frac{\ln x+\alpha x}{x}=\frac{\ln x}{x}+\frac{\alpha x}{x}=\frac{\ln x}{x}+\alpha$

Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}+\alpha\right)'=\frac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Έχουμε:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \overset{\ln x\ 1-1}{\Leftrightarrow} x=e$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e \overset{\ln x\uparrow}{\Rightarrow} x<e$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e \overset{\ln x\uparrow}{\Rightarrow} x>e$

Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών

| x | 0 | | e | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | + | 0 | − | |
| f(x) | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | |

Έτσι, η f είναι γνησίως αύξουσα στο (ο,e], γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και έχει (ολικό) μέγιστο για x=e το $f(e)=\frac{\ln e}{e}+\alpha=\frac{1}{e}+\alpha$ .

Από το σύνολο τιμών της f έχουμε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι η $1+\frac{1}{e}$. Άρα, υποχρεωτικά ισχύει ότι $\frac{1}{e}+\alpha=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha=1$ .

**Β΄ τρόπος**

Επειδή η f έχει στο $(0,+\infty)$ μέγιστη τιμή το $1+\frac{1}{e}$ υπάρχει $\kappa\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\kappa)=1+\frac{1}{e}$ .

Ισχύει λοιπόν ότι $f(x)\le f(x)$ για κάθε x>0. Άρα, η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση κ (ολικό) μέγιστο, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, άρα και στο κ και το κ είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$. Επομένως, από το Θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(\kappa)=0$ .

Άρα, $f'(\kappa)=0\Leftrightarrow\dfrac{1-\ln\kappa}{\kappa^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln\kappa=0\Leftrightarrow\ln\kappa=1$

$\Leftrightarrow\ln\kappa=\ln e\overset{\ln x1-1}{\Leftrightarrow}\kappa=e$ . Έτσι, $f(\kappa)=1+\dfrac{1}{e}\overset{\kappa=e}{\Leftrightarrow}f(e)=1+\dfrac{1}{e}$

$\Leftrightarrow\dfrac{\ln e+\alpha\cdot e}{e}=1+\dfrac{1}{e}\Leftrightarrow\dfrac{1+\alpha\cdot e}{e}=\dfrac{e+1}{e}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\alpha\cdot e=e+1\Leftrightarrow\alpha e=e\Leftrightarrow\alpha=1$

**Δ2.** Για α=1 έχουμε $f(x)=\dfrac{\ln x+x}{x}=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x}{x}=\dfrac{\ln x}{x}+1$

Έστω $\Delta_1=(0,e)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ1.

Άρα, η έχει μία το πολύ ρίζα στο Δ1.

Η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2},1\right]\subseteq\Delta_1$ . Ισχύουν ότι:

- $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1\quad\dfrac{\ln 1-\ln 2}{\frac{1}{2}}+1=\dfrac{-\ln 2}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln 2+1=\ln e-\ln 4=$

$=\ln\dfrac{e}{4}<0$ γιατί $0<\dfrac{e}{4}<1$.

- $f(1)=\dfrac{\ln 1}{1}+1=1>0$ . Άρα, $f\left(\dfrac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$ .

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)\subseteq\Delta_1$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)=0$ και επειδη η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\Delta_1$, το $x_0$ είναι μοναδικό.

Έστω $\Delta_2=[e,+\infty)$ . Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ2.

Είναι

$f(e)=\dfrac{\ln e}{e}+1=\dfrac{1}{e}+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln x}{x}+1\right)=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{+\infty}{\underset{dH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Άρα, $f\left(\Delta_2\right)=\left(1,1+\dfrac{1}{e}\right]$ . Όμως $0\notin f\left(\Delta_2\right)$ άρα η $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο $\Delta_2$.

Επομένως, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $x_0$ η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ .

Δ3. i) Είναι $f(4)=\dfrac{\ln 4}{4}+1=\dfrac{\ln 2^2}{4}+1=\dfrac{2\ln 2}{4}+1=\dfrac{\ln 2}{2}+1=f(2)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$, οπότε και 1-1 σε αυτό. Επομένως, $f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\overset{f1-1}{\Leftrightarrow}x=2$ .

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$, οπότε και 1-1 σε αυτό. Επομένως, $f(x)=f(4)\overset{f_{1-1}}{\Leftrightarrow}x=4$ .
Τελικά, η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις x=2 και x=4.

ii) $2^x\le x^2\underset{\ln x\uparrow}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}}\ln 2^x\le \ln x^2\Leftrightarrow x\cdot\ln 2\le 2\ln x\Leftrightarrow \dfrac{\ln 2}{2}\le\dfrac{\ln x}{x}$

$\Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x}+1\ge\dfrac{\ln 2}{2}+1\Leftrightarrow f(x)\ge f(2)$

Αν $x\in(0,e):f(x)\ge f(2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x\ge 2$ άρα $2\le x<e$ (1)

Αν $x\in[e,+\infty):f(x)\ge f(2)\overset{f(2)=f(4)}{\Rightarrow}f(x)\ge f(4)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}x\le 4$ άρα $e\le x\le 4$ (2)
Από τις σχέσεις (1) και (2): $2\le x\le 4$

Δ4. Το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\dfrac{1-x}{e^x}\right|dx$

Θέτουμε $e^x=u$ , άρα $e^x dx=du$ ,
Επίσης $e^x=u\Leftrightarrow x=\ln u$ .
Όταν $x=-\ln 2$ έχουμε $u=e^{-\ln 2}=e^{\ln 2^{-1}}=2^{-1}=1/2$

Όταν x=0 έχουμε $u=e^0=1$.

Είναι $E=\displaystyle\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\cdot\frac{1-x}{e^x}\right|dx=\int_{-\ln 2}^{0}\left|f\left(e^x\right)\frac{1-x}{e^{2x}}\right|e^x dx$

$=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\cdot\frac{1-\ln u}{u}\right|du$

Από το ερώτημα Δ1 η f(u) έχει ρίζα το $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$

Για $\dfrac{1}{2}<x<x_0$ , επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x)<f\left(x_0\right))\Leftrightarrow f(x)<0$.

Για $x_0<x<1$ , επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε $f(x)>f(x_0)\Rightarrow f(x)>0$ .

Επίσης, $\dfrac{1}{2}<u<1\overset{\ln x\uparrow}{\Leftrightarrow}\ln\dfrac{1}{2}<\ln u<\ln 1\Leftrightarrow -\ln 2<\ln u<0$

$\Leftrightarrow 0<-\ln u<\ln 2\Leftrightarrow 1<1-\ln u<1+\ln 2$

Επομένως, για $u\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ είναι $u^2>0$ , άρα $\dfrac{1-\ln u}{u^2}>0$ .

Επίσης, έχουμε: $f'(u)=\dfrac{1-\ln u}{u^2}$, άρα

$E=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\cdot\frac{1-\ln u}{u^2}\right|du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\cdot f'(u)\right|du=$

$=\displaystyle-\int_{\frac{1}{2}}^{x_0}f(u)\cdot f'(u)du+\int_{x_0}^{1}f_{(u)}\cdot f'(u)du$

$$=-\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[\frac{f^2_{(u)}}{2}\right]_{x_0}^{1}=-\left(\frac{f^2_{(x0)}}{2}-\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\right)+\left(\frac{f^2_{(1)}}{2}-\frac{f^2_{(x0)}}{2}\right)$$

$$=-\left(0-\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\right)+\frac{f^2(1)}{2}-0=\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)+f^2(1)}{2}=$$

$$=\frac{\left(\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1\right)^2+1}{2}=\frac{\left(\frac{-\ln 2}{\frac{1}{2}}+1\right)^2+1}{2}=\frac{(1-2\ln 2)^2+1}{2}$$

$$=\frac{1^2-4\ln2+4\ln^2 2+1}{2}=\frac{2-4\ln2+4\ln^2 2}{2}=\frac{2\left(1-2\ln2+2\ln^2 2\right)}{2}$$

$$=\left(1-2\cdot\ln2+2\ln^2 2\right)\tau.\mu.$$