ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2022
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Ενδεικτικές απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελίδα 186 σχολικού βιβλίου.
Α2. Ορισμός σελίδα 142 σχολικού βιβλίου.
Α3. Ορισμός σελίδα 161 σχολικού βιβλίου.
Α4.
α. ΣΩΣΤΟ
β. ΣΩΣΤΟ
γ. ΣΩΣΤΟ
δ. ΛΑΘΟΣ
ε. ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για το πεδίο ορισμού της fog πρέπει:

$$\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \leq 1 \end{cases} \to \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq 1 \end{cases} \to D_{fog} = [0,1]$$

Με τύπο:

$$h(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^4 - 2(\sqrt{x})^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$$

Β2. $: h'(x) = 2(x-1) \cdot (x-1)' = 2(x-1) < 0$ στο [0,1] άρα h γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της h άρα h 1-1 ως γνησίως μονότονη συνάρτηση.

Για τον τύπο της h^{-1} θέτω :

$$y = h(x) \to y = (x-1)^2 \to \sqrt{y} = \sqrt{(x-1)^2} \to$$

$$\sqrt{y} = |x-1| \xrightarrow{x \in [0,1]} \sqrt{y} = -(x-1) \to x = 1 - \sqrt{y}$$

Και επίσης το σύνολο τιμών της h είναι:

$$h([0,1]) \xrightarrow{h \searrow} [h(1), h(0)] = [0,1]$$

Το σύνολο τιμών της h είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφής της άρα:

$$h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}, \quad D_{h^{-1}} = [0,1]$$

Β3. i) ο Η φ είναι συνεχής στο [0,1) ως πράξεις συνεχών και στο 1 διότι:

$$\lim_{x \to 1} \varphi(x) = \lim_{x \to 1^-} \varphi(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{1-x}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim_{x \to 1^-} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \to 1} \varphi(x) = \varphi(1) = \frac{1}{2}$$

$\varphi(0)=1, \varphi(1)=\frac{1}{2} \to \varphi(0)\neq\varphi(1)$

Άρα , από θεώρημα ενδιαμέσων τιμών, για κάθε αριθμό ξ μεταξύ των φ(0) και φ(1) υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ ώστε $\varphi(x_0)=\xi$.

ii) Δίνεται ότι $\alpha \in \left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right)$, άρα το α ανήκει στο 1ο τεταρτημόριο όπου εκεί το ημίτονο είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, οπότε:

$\frac{\pi}{6}<\alpha<\frac{\pi}{2} \to \eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\frac{\pi}{2} \to \frac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1 \to \eta\mu\alpha \in \left(\frac{1}{2},1\right)$

Άρα, από το προηγούμενο ερώτημα, για κάθε αριθμό ημα μεταξύ των $f(0)=1$ και $f(1)=1/2$ υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0)=\eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έχουμε ότι $f'(x)=\begin{cases}-2, & x<-1\\ 3x^2-1, & x>-1\end{cases}$.

Για $x<-1$ είναι $f'(x)=-2 \Leftrightarrow (f(x))'=(-2x)'$.

Από συνέπεια του ΘΜΤ υπάρχει $c_1 \in R$ τέτοιο ώστε $f(x)=-2x+c_1$.

Για $x>-1$, είναι $f'(x)=3x^2-1 \Leftrightarrow (f(x))'=\left(x^3-x\right)'$

Από συνέπεια του ΘΜΤ υπάρχει $c_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x)=x^3-x+c_2$

Από την υπόθεση δίνεται ότι f(0)=0, επομένως για x=0 έχουμε

$f(0)=0-0+c_2 \Leftrightarrow 0=c_2$

Άρα για $x<-1$ είναι τελικά $f(x)=x^3-x$

Επομένως, έχοντας υπόψιν ότι η f ορίζεται στο , ο τύπος της f μπορεί να γραφεί

$$f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, & x<-1\\ \kappa, & x=-1\\ x^3-x, & x>1\end{cases}$$

Εδώ είναι

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-}\left(-2x+c_1\right)=2+c_1$

$\lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+}\left(x^3-x\right)=0$

$f(-1)=\kappa$

Η f είναι συνεχής στο R, άρα και στο 1, επομένως

$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \Leftrightarrow 2+c_1=0=\kappa$

Δηλαδή $c_1=-2$ και κ=0.

Τελικά ο τύπος της f γίνεται $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\le -1\\ x^3-x, & x>1\end{cases}$.

Γ2. Η εξίσωση της εφαπτομένης στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A\left(x_o, f\left(x_0\right)\right)$ είναι

$\varepsilon: y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$, με $x_0>-1$

δηλαδή:

$\varepsilon: y-\left(x_o^3-x_o\right)=\left(3x_o^2-1\right)\left(x-x_o\right)$

Η (ε) τέμνει τον άξονα y'y στο -2 άρα το σημείο $B(0,-2)$ επαληθεύει την (ε).

Οπότε για $x=0, y=-2$, έχουμε

$$-2-\left(x_o^3-x_o\right)=\left(3x_o^2-1\right)\left(0-x_o\right)\Leftrightarrow -2-x_o^3+y_o=-3x_o^3+y_o\Leftrightarrow$$

$$-2-x_o^3+3x_o^3=0\Leftrightarrow 2x_o^3-2=0\Leftrightarrow 2\left(x_o^3-1\right)=0\Leftrightarrow x_o=1$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση εφαπτομένης είναι η ευθεία

$$\varepsilon: y-\left(1^3-1\right)=\left(3\cdot 1^2-1\right)(x-1)\Leftrightarrow y-0=2\cdot(x-1)\Leftrightarrow y=2x-2$$

Γ3. Το σημείο $M(x,y), x>2$, βρίσκεται πάνω στην ευθεία $\varepsilon: y=2x-2$, άρα είναι $M(x,2x-2)$.
Η προβολή του Μ πάνω στον άξονα x'x είναι το σημείο $K(x,0)$
Το εμβαδό του τριγώνου ΜΚΓ δίνεται από τη σχέση

$$E=\frac{\beta\cdot v}{2}=\frac{(\Gamma K)\cdot(MK)}{2}=\frac{(x-2)(2x-2)}{2}=\frac{2(x-2)(x-1)}{2}=(x-2)(x-1)=x^2-3x+2, x>2$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση του εμβαδού Ε ως προς το χρόνο που είναι η

$$E(t)=x^2(t)-3x(t)+2$$

Η Ε είναι παραγωγίσιμη ως προς t ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$E'(t)=2x(t)\cdot x'(t)-3x'(t)$$

Από την υπόθεση, για τη χρονική στιγμή $t=t_o$, έχουμε ότι

$$x\left(t_o\right)=3 \text{ και } x'\left(t_o\right)=2\mu/\sec$$

Άρα

$$E'\left(t_o\right)=2x\left(t_o\right)\cdot x'\left(t_o\right)-3x'\left(t_o\right)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=12-6=6\mu^2/\sec$$

Γ4. Έχουμε $f(x)=-2x-2, x\le -1$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$

Υπολογίζουμε ξεχωριστά το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$

Είναι $\left|\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\right|=\left|\dfrac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu f(x)\right|$

Όμως $|\eta\mu f(x)|\le 1$, επομένως $\left|\dfrac{1}{f(x)}\cdot\eta\mu f(x)\right|=\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\cdot|\eta\mu f(x)|\le\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$

Από ιδιότητες απόλυτων τιμών προκύπτει $-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\le\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}\le\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|$

Όμως, $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)\underset{\substack{x\to-\infty\\ u\to+\infty}}{\overset{u=f(x)}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{u}\right|\right)=0$

Και $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)\underset{\substack{u=f(x)\\ u\to+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\left|\dfrac{1}{u}\right|\right)=0$

Άρα από Κριτήριο Παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=0$

και ξεχωριστά το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}$

Θέτω $u=-x$, όταν το $x\to-\infty$ τότε το $u\to+\infty$,
οπότε από $f(-x)=f(u)=u^3-u, u>-1$

παίρνουμε ότι $\lim\limits_{u\to+\infty} f(u) = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(u^3-u\right) - \lim\limits_{u\to+\infty} u^3 = +\infty$

Το όριο ισοδύναμα γίνεται

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{f(u)}{1+u^3} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3-u}{u^3+1} = \lim_{u\to+\infty}\frac{u^3}{u^3} = 1$$

Τελικά το ζητούμενο όριο ισούται με

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3}\right] = 0+1 = 1$$

ΘΕΜΑ Δ

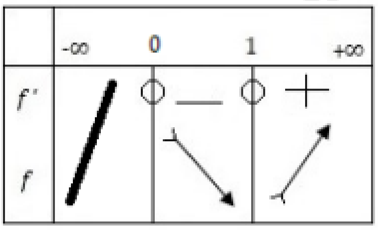
Δ1. i) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$$f'(x) = 1-\frac{3}{3x} = 1-\frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x=1$

και $f'(x)>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} > 0 \Leftrightarrow x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

Το πρόσημο της f' και η μονοτονία της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα



Επομένως η f είναι γνησίως φθίνουσα για $x\in(0,1]$ και γνησίως αύξουσα για $x\in[1,+\infty)$.

Παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για x=1 το $f(1)=1-\ln 3$

Έχουμε ότι

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+}(x-\ln(3x)) = +\infty$

και $f(1)=1-\ln 3$

Επειδή $e<3 \Leftrightarrow \ln e < \ln 3 \Leftrightarrow 1<\ln 3 \Leftrightarrow 1-\ln 3<0 \Leftrightarrow f(1)<0$

Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο (0, 1], επομένως

$\Delta_1 = f((0,1]) = [1-\ln 3,+\infty)$ και $0\in[1-\ln 3,+\infty)$.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(0,1]$ τέτοιο ώστε $f(x_1) = 0$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0, 1], επομένως και «1-1», άρα το x_1 είναι μοναδικό.

Ακόμη

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = 1-\ln 3$ και

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x-\ln(3x)) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\left(1-\frac{\ln(3x)}{x}\right)\right) = +\infty \text{ διότι}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{3x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0\,.$$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (1, +∞), επομένως

$\Delta_2 = f((1,+\infty)) = \left(\lim\limits_{x\to 1^+} f(x), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\right) = (1-\ln 3, +\infty)$ και $0 \in (1-\ln 3, +\infty)$.

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_2 \in (0,1]$ τέτοιο ώστε f(x_2) = 0.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0, 1], άρα και «1-1», άρα το x_2 είναι μοναδικό.

Επομένως υπάρχουν ακριβώς δύο $x_1 \in (0,1]$ και $x_2 \in (1,+\infty)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

ii) Η f' είναι παραγωγίσιμη στο (0, +∞) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με παράγωγο

$f''(x) = \frac{1}{x^2} > 0$

Επομένως η f είναι κυρτή στο (0, +∞).

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο [x_1, x_2] $\subset \mathbb{R}$.

Το ζητούμενο εμβαδό είναι $\mathrm{E} = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx$.

Παρατηρούμε από τον πίνακα μονοτονίας της f ότι για $x \in [x_1, x_2]$ η f δε μηδενίζεται (από ερώτημα Δ1α) και είναι συνεχής. Επομένως από συνέπειες Θεωρήματος Bolzano θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή $x_1 < 1 < x_2$ και $f(1) = 1 - \ln 3 < 0$, θα είναι f(x) < 0 για κάθε $x \in [x_1, x_2]$.

Επομένως το ζητούμενο εμβαδό γράφεται

$$\mathrm{E} = \int_{x_1}^{x_2} |f(x)|\,dx = -\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_2}^{x_1} f(x)dx =$$
$$= \int_{x_2}^{x_1} (x - \ln(3x))dx = \int_{x_2}^{x_1} xdx - \int_{x_2}^{x_1} \ln(3x)dx = I$$

Εδώ έχουμε

$$\int_{x_2}^{x_1} xdx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_2}^{x_1} = \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{2}$$ και

$$\int_{x_2}^{x_1} \ln(3x)dx = \int_{x_2}^{x_1} (x)' \cdot \ln(3x)dx =$$
$$= [x \cdot \ln(3x)]_{x_2}^{x_1} - \int_{x_2}^{x_1} 3x \cdot \ln(3x)' dx =$$
$$= \left[x_1 \cdot \ln(3x_1) - 3x_2 \cdot \ln(3x_2)\right] - \int_{x_2}^{x_1} 1dx =$$
$$= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - \int_{x_2}^{x_1} 1dx =$$
$$= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - [x]_{x_2}^{x_1} =$$
$$= x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - x_1 - x_2$$

Από το προηγούμενο ερώτημα γνωρίζουμε ότι

$f(x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 - \ln(3x_1) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_1) = x_1$ και

$f(x_2) = 0 \Leftrightarrow x_2 - \ln(3x_2) = 0 \Leftrightarrow \ln(3x_2) = x_2$

Δηλαδή το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_{x_2}^{x_1} \ln(3x)dx = x_1 \ln(3x_1) - x_2 \cdot \ln(3x_2) - x_1 - x_2 =$$
$$= x_1 \cdot x_1 - x_2 \cdot x_2 - x_1 - x_2 =$$
$$= x_1^2 - x_2^2 - (x_1 - x_2)$$

Επομένως

$$\mathrm{I} = \int_{x_2}^{x_1} x dx - \int_{x_2}^{x_1} \ln(3x) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right) - \left[x_1^2 - x_2^2 - \left(x_1 - x_2\right)\right] =$$

$$= \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_2^2}{2} + x_2^2 - x_1^2 + x_1 - x_2 =$$

$$= \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_1^2}{2} - \left(x_2 - x_1\right) =$$

$$= \frac{\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 - x_1\right)}{2} - \frac{2\left(x_2 - x_1\right)}{2} =$$

$$= \frac{\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 - x_1 - 2\right)}{2}$$

Δ3. Από το προηγούμενο ερώτημα είναι $\mathrm{E} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x_2 - x_1\right)\left(x_2 + x_1 - 2\right) > 0$

Όμως είναι $x_2 > x_1 \Leftrightarrow x_2 - x_1 > 0$

Επομένως

$x_1 + x_2 - 2 > 0 \Leftrightarrow -x_1 - x_2 + 2 < 0 \Leftrightarrow 2 - x_1 < x_2$

Επειδή $x_1 < 1 \Leftrightarrow -x_1 > -1 \Leftrightarrow 2 - x_1 > 1$ είναι $2 - x_1 \in (1, +\infty)$ και $x_2 \in (0, +\infty)$

Σε αυτό το διάστημα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Επομένως

$2 - x_1 < x_2 \Leftrightarrow f\left(2 - x_1\right) < f\left(x_2\right) \Leftrightarrow f\left(2 - x_1\right) < 0$

Δ4. Η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο x_2 είναι

$\varepsilon : y - f\left(x_2\right) = f'\left(x_2\right)\left(x - x_2\right) \Leftrightarrow y = f'\left(x_2\right)\left(x - x_2\right)$

Η f είναι κυρτή, άρα η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη ευθεία.

Άρα $f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq f'\left(x_2\right)\left(x - x_2\right)$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x = x_2$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $f(1) = 1 - \ln 3 \Leftrightarrow \ln 3 - 1 = -f(1)$.

Με αυτά υπόψιν, η ζητούμενη σχέση γράφεται διαδοχικά

$2f(x) + \ln 3 = 1 + f'\left(x_2\right)\left(x - x_2\right) \Leftrightarrow$

$2f(x) + \ln 3 - 1 - f'\left(x_2\right)\left(x - x_2\right) = 0 \Leftrightarrow$

$2f(x) - f(1) - f'\left(x_2\right)\left(x - x_2\right) = 0 \Leftrightarrow$

$(f(x) - f(1)) + \left(f(x) - f'\left(x_2\right)\left(x - x_2\right)\right) = 0$

Είδαμε ότι η f έχει στο $x = 1$ ολικό ελάχιστο, επομένως

$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = 1$.

Άρα η εξίσωση είναι αδύνατη.